TD représentation des nombres

Représentation d'un nombre dans une base quelconque.
Opérations de base.
Problèmes du codage d'un nombre.
Représentation binaire signé, en complément à deux
Forme normalisée

I Entiers Naturels

Convertir 00011101(2), 00111100(2) en hexadécimal.

Lorsque la base initiale Bi est une puissance entière de la base finale Bf, le nombre de chiffre de Bi nécessaire pour représenter un chiffre de Bf est égal à l'exposant de Bi.
1D, 3C

Convertir en binaire 75(H), 1A(H), DF(H).

01110101, 00011010, 11011111

Convertir 10010110(2) et 11000110(2) en notation décimale.

2+4+16+128=150(10)
16*12+6=198(10)=C6(H)

Convertir 57(10) et 248(10) en binaire et en hexadécimal.

00111001=39(H)
11111000=F8(H)

A quoi correspond un décalage à gauche (resp. droite) d'une position dans la base B ?

Un décalage à gauche (resp. droite) d'une position dans une Base B est une multiplication (resp. division entière) par B.

II Les entiers Relatifs

On considère une représentation complément à 2 sur un octet (vite le cours)

Opposé d'un entier relatif

Rappel de la méthode pour obtenir l'opposé d'un entier relatif N
-Complèmenter N bit à bit
-Ajouter 1 (facile non)

Justifier cette méthode

On suppose que les nombres sont écrits sur n bits. Pour justifier le calcul de l'opposé de A comme 1+A/ (avec A/ complémenté bit à bit de A), on peut vérifier que pour tout A? A+(1+A/)=0 mod 2^n.
A=Somme (0 à n-1)2^iai et A/=Somme (0 à n-1)2^iai/. Donc A+A/= Somme (0 à n-1) 2^i=2^n-1

Donner en hexa l'opposé de 5A(H), E0(H), 80(H).

A6, 20, 80.

Addition

Faire les additions suivantes sur un octet, noter la retenue :
15(h)+48(H) ; F5(h)+AF(H) ; 15(H)+A3(H) ; 72(H)+F9(H) ; 47(H)+3A(H) ; 81(H)+95(H). Dans quelles conditions le résultat est-il correct ?

5D, ret=0 correct p+p=>p
A4, ret=1 c n+n=>n
B8, ret=1 c p+n=>n
6B, ret=1 c p+n=>p
81, ret=0 Faux p+p=>n
16 ret=1 faux n+n=>p
Les résultats sont justes lorsque les signes différents ou (signes identiques si signe=retenue).
Justification pour le calcul sur 8 bits :
Soit x est un entier relatif dans [-128,127], soit c(x) le nombre qui est l'interprétation non signée de la représentation en complément à 2 de x (ex: si x=3, c(x)=3 ; si x=-3, c(x)=253). On a x≥0 c(x)=x ; si x<0, c(x) =256+x (2)
Le résultat de l'addition « dans un additionneur » de x et de y est en fait la somme binaire de c(x) et c(y) tronquée à 8 bits. D'après (2), on voit que le résultat en interprétation non signée est toujours correct modula 256. Comme d'autre part l'interprétation signée et l'interprétation non signée d'un nombre négatif sont congrues modulo 256, le résultat de l'addition « dans un additionneur » est toujours correct modulo 256. Il ne reste donc plus qu'à vérifier que le résultat exact de l'addition tombe dans le sous-intervalle [-128,127]
Soient x et y dans cet intervalle
si x et y ≥0, il n'y a jamais de retenue dans l'additionneur (2 bits de plus fort poids à 0) et 0≤x+y<255 ; le résultat de l'additionneur n'est correct que si son bit de poids fort est 0.
Si x≥0 et y<0, x+y est toujours dans [-128,127].
Si x et y<0, il y a toujours une retenue dans l'additionneur et -256≤x+y<0 ; le résultat de l'additionneur n'est correct que si son bit de plus fort poids est 1.

Soustraction

Rappel : la soustraction se fait en ajoutant l'opposé du nombre à soustraire
A-B=A+(-B)

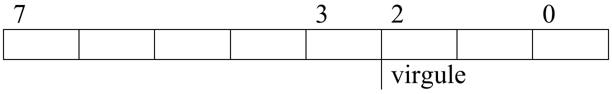
Faire les soustractions en hexadécimal suivantes, noter la retenue :
43(H)-18(H) ; A4(H)-97(H) ; 85(H)-18(H) ; 65(H)-E5(H). Dans quelles conditions le résultat est-il correct ?

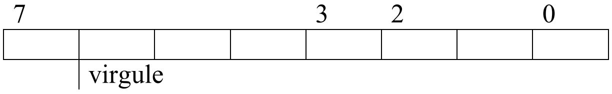
2B ret=1 c p-p=>p
0D ret=1 c n-n=>p
6D ret=1 Faux n-p=>p
80 ret=0 Faux p-n=>n

Les résultats sont corrects lorsque le signe différents lorsque le signe est égal à la retenue.

III Nombres en représentation virgule fixe

On considère les deux représentations suivantes en complément à 2 :





Pour les deux représentations, on demande :

1. Le plus grand positif
2. Le plus petit positif
3. Le plus grand négatif
4. Le plus petit négatif.

I. 01111.111 soit 15.875
   0.1111111 soit $1-2^{-7}$=127/128=0,9921875

II. 00000.001 soit 0.125
    0.0000001 soit 2-7=1/128=0.0078125

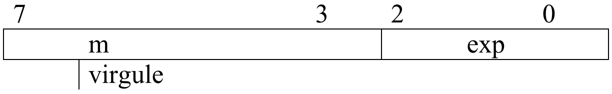
III. 1111.1111 soit -0.125
     1.1111111 soit -1/128

IV. 10000.000 soit -16
    1.0000000 soit -1

IV Nombres en représentation « virgule flottante »

Un nombre réel est représenté sous la forme R=mBexp où m est la mantisse, exp est l'exposant et B la base de l'exposant.

On considère la représentation suivante sur 8 bits :



L'exposant est codé de la manière suivante (excès 4) :

0	0	0	-4
0	0	1	-3
0	1	0	-2
0	1	1	-1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	2
1	1	1	3

La mantisse est en complément à 2, avec virgule à droite du bit 7.

On demande, avec B=2 et B=16 :

1. Le plus petit nombre positif
2. Le plus grand nombre positif et son prédécesseur indiquer leur écart
3. Le plus petit nombre négatif
4. Le plus grand nombre négatif
5. écrire 1 de toutes les façons possibles
6. Ecrire 4 et 4,25
7. Ecrire 1 et 0,25 de façon normalisée. Les ajouter et donner le résultat normalisé.

1) 00001000=2^{-4} B^{-4} soit :
2^{-4} 2^{-4}=1/256
2^{-4} 16^{-4}=2^{-20}=9.53 10-7

2) 01111111=(1-2-4)B^3 soit : 7,5 (B=2) 3840 (B=16)
1110111=(14/16)B^3 soit 7 (B=2) 3584 (B=16)
l'écart est de (1/16)B^3 soit 0,5 (B=2) 256 (B=16)

3) 10000111=-1B^3 soit -8 (B=2) -4096 (B=16)

4) 11111000=-(2^{-4})B^{-4} soit -1/256 (B=2) -9,53 10^{-7} (B=16)

5) Il faut trouver =m et n tels que 1=mB^n
En base 2 01000101 (0,5*2)
00100110 (,25*4)
00010111 (,125*8)

Base 16 00001101 (,0625*16)

6) Base 2 01000111 (0,5*8)=4
01001111 (,5625*8)=4,25

Base 16 00100101 (0,25*16)
impossible pour 4,25

7) Base 2 : 1 normalisé 01000101 (0,25*2)
0,25 normalisé 01000011 (0,5*0,5)
somme :
on dénormalise 0,25 00010101
et on ajoute les mantisses 01010101
Base 16 : impossible

Soit la représentation suivante (excès 1023)

	1,	
S	exposant	Mantisse
63	62	51

On demande, avec B=2 et avec B=16 :
La valeur représentée est +/-1,M*$2^{(E-1023)}$

1. Le plus petit nombre positif
2. Le plus grand nombre positif et son prédécesseur. Indiquer l'écart
3. Le plus petit nombre négatif
4. Le plus grand nombre négatif

1*2^{-1023}

$(1+1-2^{-52})*2^{1024}$, prédécesseur $(1+1-2-^{51})*2^{1024}$
L’écart est de 2^{972} (bonne chance)

$-(1+1-2^{-52})*2^{1024}$

-2^{-1023}