Corrigé de l'examen de Logique, L2, 2013

S. Cerrito

June 6, 2013

1 Exercice 1

Voici des formules traduisant correctement les 5 énoncés.

1. $\forall x\ (L(x) \to A(a,x))$
2. $\forall x\ (V(x) \to (P(x) \land \forall z\ (M(x,z) \to L(z)))$
   Remarque : la sous-formule $\forall z\ (M(x,z) \to L(z)))$ dit que si x mange une chose quelconque z, alors ce z est forcement un légume, c'est à dire que x mange exclusivement des légumes. Donc la formule entière dit que manger exclusivement des légumes est une condition **nécessaire** pour être une personne vegétarienne : si on est une personne vegétarienne, alors on mange exclusivement des légumes.
3. $\forall x\ \forall y\ ((S(x) \land S(y)) \to (PG(n(x), n(y)) \land PG(n(y), n(x))))$
4. D'abord, écrivons une formule, que l'on notera ici $M(y)$ (pour abréger), qui dit que (l'ensemble) y a un élément maximum; ici, m, z et x sont des variables.
   $M(y) = \exists m\ \forall z\ (EL(z,y) \to PG(m,z)$.
   La formule entière cherchée est : $\forall y\ ((S(y) \land F(y)) \to M(y))$

2 Exercice 2

Formule A Cette formule est vraie pour $\mathcal{I}_1$: puisque ici a signifie 1, et p vaut vrai pour 1, l'implication $p(x) \to p(a)$ est vraie pour toute valeur de x. Un raisonnement analogue permet de conclure que la formule est vraie pour $\mathcal{I}_2$ aussi.
Ceci dit, *la formule A n'est pas valide* : par exemple, soit $\mathcal{I}_3$ une interprétation où l'univers est $\{1,2\}$, $\mathcal{I}_3(a) = 1$ et $\mathcal{I}_3(p) = \{2\}$, c'est à dire que p vaut Vrai seulement pour 2. Alors, pour x qui vaut 2, l'implication $p(x) \to p(a)$ vaut Faux, donc $\forall x(p(x) \to p(a))$ est fausse pour cette interprétation.

Formule B Cette formule est vraie pour les 2 interprétatios. *De facto, B est valide* : étant donné n'importe quelle inteprétation $\mathcal{I}$, son univers D est non-vide par définition; or, si p vaut Vrai pour tout élément de D, en particulier vaut vrai pour l'élément nommé par la constante a.

(a) Raisonnement 1.
$Pr_1 = \forall y \; ((S(y) \wedge F(y)) \rightarrow M(y))$
$Pr_2 = S(e_1) \wedge M(e_1)$.
$Concl = S(e_1) \wedge F(e_1)$
Une interprétation qui rend $Pr_1 \wedge Pr_2$ vraie mais $Concl$ fausse est celle même suggerée par l'énoncé en français, en interprétant, par exemple, la constante e_1 comme l'ensemble des nombres entiers négatifs ou nuls !

(b) Raisonnement 2.
$Pr_1 = \forall y \; ((S(y) \wedge F(y)) \rightarrow M(y))$
NB: "y n'est pas infini" se formalise par $\neg\neg F(y)$, qui est logiquement équivalent à $f(y)$.
$Pr_2 = S(e_2) \wedge F(e_2)$.
$Concl$: $M(e_2)$.
Il est clair que, peut importe l'interprétation choisie, étant donnés la signification logique de $\forall$ et celle $\rightarrow$, si $Pr_1 \wedge Pr_2$ est vraie alors $M(e_2)$ l'est forcement. D'ailleurs, si vous faites (correctement !) un tableau pour tester la validité de $(Pr_1 \wedge Pr_2) \rightarrow M(e_2))$, vous trouverez bien que cette formule est valide (mais le tableau n'était pas démandé par cet exercice).

4 Exercice 4

1. Soit la formule (satisfiable) $\forall x \; p(x)$. Tout tableau ayant cette formule comme racine aura la forme :

$$\begin{array}{c} 1) \;\; \forall x \, p(x) \\ \downarrow \;\; (\gamma) \\ 2) \;\; p(l_1), \forall x \, p(x) \\ \downarrow \;\; (\gamma) \\ \vdots \\ n+1) \;\; p(l_1), \cdots, p(l_n), \forall x \, p(x) \\ \vdots \end{array}$$

et ne terminera jamais.

2. Voici un tableau qui montre que la formule est satisfiable (b, c et d sont des constantes <u>nouvelles</u>) :