Examen de Logique, L2 2010

31-05-2010

Les documents sont permis. Le barême est donné à titre indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1, 4 points

Formaliser les énoncés suivants en logique des prédicats :

1. Quelque soit le nombre naturel n, une condition suffisante afin que n soit impair est que n soit premier et différent de 2.
2. Avoir ou bien le même père ou bien la même mère est une condition nécessaire pour être fréres.
3. Si la mère de Jean est différente de la mère de Robin des Bois et le père de Jean est différent du père de Robin des Bois, alors Jean et Robin des Bois ne sont pas fréres.
4. Jean n'est frére d'aucun frére de Robin des Bois.

On utilisera le vocabolaire suivant.
Symboles de prédicat :
$N(x)$: x est un nombre naturel $\quad$ $I(x)$: x est un nombre naturel impair
$Pr(x)$: x est un nombre naturel premier ; $\quad$ $=(x, y)$: x et y sont égaux ;
$F(x, y)$: x et y sont fréres.
Constantes
d : le nombre 2 ; $\quad$ j : Jean ; $\quad$ r : Robin des Bois.
Symboles de fonction autres que les constantes
m : la mère de (son argument) $\quad$ p : le père de (son argument)

Exercice 2, 5 points

Soient les formules :

$$A : \forall x\ (o(x) \to o(s)) \quad B : \ (\forall x\ o(x)) \to o(s) \quad C : o(s) \to \forall x\ o(s)$$
$$D : (\exists x\ o(x)) \to o(s) \quad E : \exists x (o(x) \to o(s)) \quad F : o(s) \to \exists x\ o(x)$$

où p est un symbole de prédicat et s est une constante.

Soient $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ deux interprétations telles que :
- Dans les deux cas, l'univers (domaine) est l'ensemble des 10 salles de cours d'un bâtiment donné ;
- Dans les deux cas, l'interprétation de la constante s est la salle de cours N. 1.
- Dans les deux cas, l'interprétation du symbole de prédicat o est l'ensemble des salles de cours ouvertes ;
- Dans le cas de $\mathcal{I}_1$, la salle N. 1 est ouverte et toutes les autres sont fermées ;
- Dans le cas de $\mathcal{I}_2$, la salle N. 1 est fermée et toutes les autres sont ouvertes ;

1. Pour chacune des formules $A - F$, calculer sa valeur de verité, d'abord par rapport à $\mathcal{I}_1$, puis par rapport à $\mathcal{I}_2$;

2. Pour chacune des formules $A - F$, dire si elle est valide ou pas. Justifiez vos réponse : si vous ditez que la formule n'est pas valide, donnez une interprétation où elle est fausse ; si vous ditez qu'elle valide, expliquez pourquoi une interprétation la rendant fausse ne peut pas exister (en huit lignes au maximum).

Exercice 3, 4 points

On considère la situation suivante des personnes d'un village :
Il existe une personne du village qui coiffe *toutes* les personnes du village qui ne se coiffent pas elles-mêmes, *et* coiffe *seulement* ces personnes la.

1. Formaliser l'enoncé ci-dessus par une formule A de la logique des prédicats, en utilisant le vocabulaire qui contient les symboles de prédicats suivants :
   $P(x)$: x est une personne du village
   $C(x, y)$: x coiffe y
2. La situation ci-dessus, est-elle possible ? Pour répondre, testez la satisfiabilité de A en utilisant la méthode des tableaux. Pour cela, on fera la récriture preliminaire de A qui est eventuellement nécessaire.

Exercice 4, 7 points

Pour cet exercice sur les tableaux, on fera les récritures preliminaires qui sont eventuellement nécessaires. On indiquera de façon claire les unificateurs utilisés. Ici, p, q et r sont des symboles de prédicat, tandis que a, b et c sont des constantes.

1. Dire si les ensembles de formules E_i suivants sont satisfiables ou pas, en justifiant les réponses données par la costruction de tableaux. Dans le cas où vous répondez que E_i est satisfiable, expliquez pourquoi le tableau correspondant ne pourra pas aboutir à une réfutation, et donner aussi un modèle de E_i.
   (a) $E_1 \;:\; \{\forall x(p(x) \to \forall z\, q(z)), \neg q(a)\}$
   (b) $E_2 \;:\; \{\exists y\, p(y),\ \forall x(p(x) \to q(x)),\ \forall z \neg q(z)\}$
2. La formule B suivante est valide. Le démontrer avec la méthode des tableaux.

$$\forall x \exists y \forall z \exists w (p(x, y) \vee \neg p(w, z))$$

Corrigé

Exercice 1

Barême : 1 × 4. C'est un exercice banale, mais les étudiants peuvent se tromper avec le différent usage des symboles de fonction et de prédicat. Pas de corrigé.

Exercice 2

Barême : (0,5 × 6) +2

1. – A est vraie pour la première interprétation, fausse pour la seconde. Donc n'est pas valide.
   – B est vraie pour les deux interprétations.
   – C est fausse pour la première interprétation,vraie pour la seconde. Donc n'est pas valide.
   – D est vraie pour la première interprétation, fausse pour la seconde. Donc n'est pas valide.
   – E est vraie pour les deux interprétations.
   – F est vraie pour les deux interprétations.
2. Les seules candidates à être valides sont B, E et F, au vu de la première question. En effet, les 3 sont valides :
   La validité de B a été vue en cours.
   Puisque $E= \exists x(o(x) \to o(s))$, s'il n'était pas valide il existerait une interprétation $\mathcal{I}$ telle que sa négation est vraie et cette dernière est logiquement équivalente à $\forall x(o(x) \wedge \neg o(s)$, qui a comme consequences logiques $\forall x o(x)$ et $\neg o(s)$. Or, ce n'est pas possible que $\forall x o(x)$ soit vraie mais $o(s)$ soit fausse. Donc E est valide.
   F est aussi valide, car, si elle ne l'était pas, pour quelque interprétation $\mathcal{I}$ on aurait que $o(s)$ est vraie mais $\exists x o(x)$ est faux, ce qui est absurde.

Exercice 3, 3 points

Barême : 2,5 + 1,5

C'est une situation impossible, car A (si correctement écrite) est insatisfiable. C'est une reformulation du paradoxe de Russell...
La difficulté éventuelle est dans la formalisation.

Exercice 4, 7 points

Barême : 2+2+3

1. Le premier ensemble est satisfiable, le second n'est le pas.
   Les formules de $E_1 \;= \forall x(p(x) \to \forall z\ q(z)), \neg q(a)\}$ se réécrivent en f.n.n., en donnant le premier noeud du tableau :
   $1\ :\ \ \forall x(\neg p(x) \vee \forall z\ q(z)), \neg q(a)$
   Avec la règle universelle :
   $3\ : \neg p(l_1) \vee \forall z\ q(z),\ \forall x(\neg p(x) \vee \forall z\ q(z)), \neg q(a)$
   En appliquant la règle pour $\vee$ on obtient 2 noeuds :
   $4\ : \neg p(l_1),\ \forall x(\neg p(x) \vee \forall z\ q(z)), \neg q(a)$
   et
   $5\ : \forall z\ q(z),\ \ \forall x(\neg p(x) \vee \forall z\ q(z)), \neg q(a)$
   Si on continue la branche à gauche, c'est à dire que l'on crée un fils de 4 en utilisant la règle universelle, on obtient :
   $4_1\ : \neg p(l_1),\ \neg p(l_2) \vee \forall z\ q(z)),\ \forall x(\neg p(x) \vee \forall z\ q(z)), \neg q(a)$
   En en appliquant la règle pour $\vee$ on obtient deux noeuds, dont celui de gauche est :
   $4_{11}\ : \neg p(l_1),\ \neg p(l_2),\ \forall x(\neg p(x) \vee \forall z\ q(z)), \neg q(a)$
   et celui de droite est :
   $4_{12}\ : \neg p(l_1),\ \forall z\ q(z)),\ \forall x(\neg p(x) \vee \forall z\ q(z)), \neg q(a)$
   Maintenant, on pourrait continuer la branche la plus à gauche du tableau en appliquant à

nouveau la règle universelle à $\forall x(\neg p(x) \vee \forall z\ q(z))$, et ainsi de suite. Il est clair que la branche la plus à gauche du tableau est infinie, car elle comporte un nombre infini de noeuds de la forme :
$\neg p(l_1),\ \neg p(l_2), ..., \neg p(l_k),\quad \forall x(\neg p(x) \vee \forall z\ q(z)), \neg q(a)$
où k peut être arbitrariement grand. Donc cette branche ne pourra jamais être close et on ne peut pas obtenir une réfutation. Cette branche décrit les modèles de E_1 où le prédicat p est toujours faux et q est faux pour l'objet qui se nomme a.

Pour E_2, en revanche, on obtient facilment une réfutation.

2. La formule B de la dernière question est valide, mais le démontrer n'est pas immediat : il faut utiliser plus qu'une fois la règle universelle, pour traiter la même formule, sur une branche. Quand on fait la négation de B, on obtient le node 1 su tableau :
$1\ :\ \ \exists x \forall y \exists z \forall w(\neg p(x, y) \wedge p(w, z))$ De
cela, avec la règle pour $\exists$:
$2\ :\ \ \forall y \exists z \forall w(\neg p(a, y) \wedge p(w, z))$
De 2, avec la règle universelle :
$3\ :\ \ \exists z \forall w(\neg p(a, l_1) \wedge p(w, z),\ \forall y \exists z \forall w(\neg p(a, y) \wedge p(w, z)).$
Avec avec la règle universelle :
$4\ :\ \ (\neg\ p(a, l_1) \wedge p(l_2, f(l_1)),\ \forall y \exists z \forall w(\neg p(a, y) \wedge p(w, z)).$
Donc, avec la règle pour $\wedge$:
$5\ :\ \ \neg p(a, l_1),\ p(l_2, f(l_1)),\ \forall y \exists z \forall w(\neg p(a, y) \wedge p(w, z)).$
La, il faut encore continuer, car on ne peut pas unifier l_1 avec $f(l_1)$! Il faut appliquer encore une fois la règle universelle à $\forall y \exists z \forall w(\neg p(a, y) \wedge p(w, z)$ pour arriver, à la fin, à une branche close. Donc, en appliquant à nouveau la règle universelle à 5 :
$7\ :\ \ \neg p(a, l_1),\ p(l_2, f(l_1)),\ \exists z \forall w(\neg p(a, l_3) \wedge p(w, z)),\ \forall y \exists z \forall w(\neg p(a, y) \wedge p(w, z)).$
La règle existentielle donne :
$8\ :\ \ \neg p(a, l_1),\ p(l_2, f(l_1)),\ \forall w(\neg p(a, l_3) \wedge p(w, g(l_1, l_2, l_3))),\ \forall y \exists z \forall w(\neg p(a, y) \wedge p(w, z)).$
Encore une fois la règle universelle :
$9\ :\ \ \neg p(a, l_1),\ p(l_2, f(l_1)),\ \neg p(a, l_3) \wedge p(l_4, g(l_1, l_2, l_3)),\ \forall w(\neg p(a, l_3) \wedge p(w, g(l_1, l_2, l_3))),$
$\forall y \exists z \forall w(\neg p(a, y) \wedge p(w, z)).$
Avec la règle pour $\wedge$ on obtient :
$10\ :\ \ \neg p(a, l_1),\ p(l_2, f(l_1)),\ \neg p(a, l_3),\ p(l_4, g(l_1, l_2, l_3)),\ \forall w(\neg p(a, l_3) \wedge p(w, g(l_1, l_2, l_3))),$
$\forall y \exists z \forall w(\neg p(a, y) \wedge p(w, z)).$
Et on peut clore la branche avec la substitution $\sigma = \{l_2/a, l_3/f(l_1)\}$