Examen de Logique, L2 Informatique, 2013

21 mai 2013

Les documents (notes de cours et de TD) sont permis. Le barême est donné à titre indicatif et peut être modifié
DUREE : 3 heures.

Exercice 1 : Formalisation en Logique des Prédicats, 4,5 points

Soit $\mathcal{L}_1$ le langage de la logique des prédicats ayant le vocabulaire suivant :
Constantes : une seule, a, pour signifier Antoine.
Symboles de Fonctions : une seule, n, à 1 argument ;
$n(x)$ veut dire : le nombre d'éléments de (l'ensemble) x.
Les symboles de prédicats sont décrits par la table suivante :

Prédicat	Nombre d'arguments	Signification
P	1	$P(x)$: x est une personne
L	1	$L(x)$: x est un légume
V	1	$V(x)$: x est une personne végétarienne
S	1	$S(x)$: x est un ensemble
F	1	$F(x)$: x est fini
A	2	$A(x, y)$: x aime y
M	2	$M(x, y)$: x mange y
EL	2	$EL(x, y)$: x est un élément de l'ensemble y
PG	2	$PG(x, y)$: x est supérieur ou égal à y

Exprimer les énoncés suivant dans le langage $\mathcal{L}_1$:

1. Antoine aime tous les légumes.
2. Seulement les personnes qui mangent exclusivement des légumes sont végétariennes.
3. Si deux ensembles ont les mêmes éléments, alors ils sont égaux.
4. Tous les ensembles ont le même nombre d'éléments.
5. Chaque ensemble fini a un élément maximum.

Exercice 2 : Interprétations et Vérité, 6 points

Soient les formules :

$$A : \forall x\ (p(x) \rightarrow p(a)) \quad B : \ (\forall x\ p(x)) \rightarrow p(a) \quad C : p(a) \rightarrow \forall x\ p(x)$$
$$D : (\exists x\ p(x)) \rightarrow p(a) \quad E : \exists x(p(x) \rightarrow p(a)) \quad F : p(a) \rightarrow \exists x\ p(x)$$

où p est un symbole de prédicat et a est une constante.

Soient $\mathcal{I}_1$, et $\mathcal{I}_2$ deux interprétations telles que :
– Dans les deux cas, l'univers (domaine) est l'ensemble $\{1, 2, 3\}$;
– $\mathcal{I}_1(a) = 1$ et $\mathcal{I}_2(a) = 2$;

- Pour $\mathcal{I}_1$ l'interprétation du symbole de prédicat p est l'ensemble $\{1, 3\}$, c'est à dire que p vaut Vrai pour 1 et 3 et vaut Faux pour 2. Pour $\mathcal{I}_2$, l'interprétation du symbole de prédicat p est l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

1. Pour chacune des formules $A - F$, calculer sa valeur de vérité, d'abord par rapport à $\mathcal{I}_1$, puis par rapport à $\mathcal{I}_2$;
2. Pour chacune des formules $A - F$, dire si elle est valide ou pas. Justifiez vos réponse : si vous dites que la formule n'est pas valide, donnez une interprétation où elle est fausse ; si vous dites qu'elle est valide, expliquez pourquoi une interprétation la rendant fausse ne peut pas exister (en huit lignes au maximum).

Exercice 3 : Conséquence Logique et Correction des Raisonnements, 5 points

Le langage de la logique des prédicats utilisé ici est le langage $\mathcal{L}_1$ de l'exercice 1, auquel on ajoute les constantes e_1 et e_2 pour nommer deux ensembles particuliers. Soient les deux raisonnements suivants, ayant, chacun, deux prémisses et une conclusion (ce qui suit le mot "'Donc") :

1. Tous les ensembles finis ont un maximum. L'ensemble e_1 a un maximum. Donc e_1 est un ensemble fini.
2. Tous les ensembles sauf ceux qui sont infinis ont un maximum. e_2 est un ensemble fini. Donc e_2 a un maximum.

Questions
Pour chacun des deux raisonnements ci-dessus :

1. Dire s'il est correct, c'est à dire si la conclusion suit logiquement des prémisses.
2. Justifier vos réponses en suivant la procédure suivante :

   - Formalisez, d'abord, les prémisses et la conclusion du raisonnement r par 3 formules, Pr_1, Pr_2 et $Conc$;
   - Si vous avez dit que le raisonnement est correct, montrez que $Pr_1, Pr_2 \models Conc$; pour le faire, utilisez le style d'argumentation que vous voulez, même semi-formelle, à condition que l'argumentation soit rigoureuse. Si, en revanche, vous avez dit que le raisonnement n'est pas correct, donner une interprétation des symboles de prédicats et des constantes telle que $Pr_1 \wedge Pr_2$ est vraie mais $Conc$ est fausse.

Exercice 4 : Tableaux pour la Logique des Prédicats, 4,5 points

Questions

1. Donner un exemple simple et court montrant que la construction d'un tableau pour une formule F de la logique des prédicats peut ne pas terminer.
2. Utilisez la méthode de tableaux afin de déterminer si la formule suivante, où a est une constante, est satisfiable :
$$\exists y\, r(a, y) \;\wedge\; \exists x \exists y \neg r(x, y)$$
3. Utilisez la méthode de tableaux afin de déterminer si la formule suivante est valide :
$$(\exists x \forall y\, r(x, y)) \;\rightarrow\; \forall y \exists x\, r(x, y)$$

N.B : Bien que, en général, la construction d'un tableau pour une formule F de la logique des prédicats puisse ne pas terminer, les tableaux permettant de répondre aux questions 2 et 3 ci-dessus sont finis.