Solution de l'exercice 4

Soit I une interprétation quelconque et i un état de I.
Il s'agit de démontrer deux implications :

1) Si $F \mathcal{R} G$ est vraie à l'état i de I, alors $\neg F \mathcal{U} \neg G$ est fausse à cet état ;
2) Si $\neg F \mathcal{U} \neg G$ est fausse à l'état i de I, alors $F \mathcal{R} G$ est vraie à cet état.

Preuve de 1

Supposons $F \mathcal{R} G$ vraie à i (c'est-à-dire $I, i \models F \mathcal{R} G$).
On a deux cas : a) Quelque soit $k \geq i$, G est vraie à l'état k ou bien b) il existe un $k \geq i$ tel que F est vraie à l'état k et, quelque soit j tel que $i \leq j \leq k$ on a que G est vraie à j.
(Remarque : la lecture intuitive de $F \mathcal{R} G$ – F "releases" G est que la vérité de F à un état k "libère" G de l'obligation d'être vraie : G doit être vraie jusqu'à l'instant k où F est vraie (et à k lui-même aussi)).

Cas a)
La situation est celle correspondant à la figure suivante :

i .... toujours G

Il est donc faux qu'il existe un $j \geq i$ tel que $\neg G$ est fausse est vraie à k. Par conséquent, $\neg F \mathcal{U} \neg G$ est fausse à i.

Cas b)
La situation est celle correspondant à la figure suivante :

$$\underbrace{i \quad\quad\quad\quad \overset{F}{k}}_{G \text{ est vraie dans cet interval}}$$

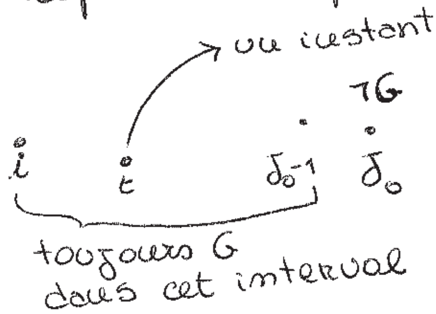
Il en suit que ou bien G est toujours vraie après k

CQFD

(et nous sommes alors dans le cas a)) ou bien le premier instant j après i où $\neg G$ est vraie se trouve strictement après k. Par conséquent, c'est faux que $\neg F$ est vraie dans tout point de l'intervalle $[i, \ldots, j-1]$, puisque F est vraie à k. Par conséquent, c'est faux que la formule $\neg F \,\mathcal{U}\, \neg G$ est vraie à i.

Preuve de 2

Supposons que $\neg F \,\mathcal{U}\, \neg G$ est fausse à l'état i. Alors ou bien il n'existe pas de $j \geq i$ tel que $\neg G$ est vraie à j, c'est à dire que G est toujours vraie à partir de l'instant i, ou bien un tel état j où $\neg G$ est vraie existe. Dans le premier cas, c'est évident que $F \,\mathcal{R}\, G$ est vraie à l'instant i, analysons donc le deuxième cas. Soit j_0 le premier instant $\geq i$ où $\neg G$ est vraie. Puisque $\neg F \,\mathcal{U}\, \neg G$ est fausse à i, on a la situation représentée par la figure suivante :



On observera qu'on a forcément $j_0 > i$ (autrement, on aurait forcément que $\neg F \,\mathcal{U}\, \neg G$ est vraie à i). Alors, en prenant $k = t$, on a :

- $k \geq i$ et F est vraie à k
- quelque soit x tel que $i \leq x \leq k$, la formule G est est vraie à x.

Il en suit que $F \,\mathcal{R}\, G$ est vraie à l'instant i.

Solution (partielle) de l'ex 5. ③

1) On donne ici les réponses seulement pour les questions c, d et e.

c) Oui : le mot $\emptyset^\omega$ (qui décrit l'interprétation où p est toujours fausse) est accepté.

d) Oui : le mot $\{p\}^\omega$ n'est pas accepté, par exemple

e) A est satisfiable, mais elle n'est pas valide : l'interprétation $\emptyset^\omega$ est un modèle de A, tandis que A est fausse pour l'interprétation $\{p\}^\omega$, par exemple.

2) On donne la solution complète pour B.

a) Le tableau :

① $\square((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg p))$

$\downarrow(\square)$

② $\underline{(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg p)}$, $\circ\square((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg p))$, B^*

$(\vee)$

③ $\underline{p\wedge q}$, $\circ\square((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg p))$, B^*, $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg p))^*$

$\downarrow(\wedge)$

④ p, q, $\circ\square((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg p))$, B^*, $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg p))^*$, $(p\wedge q)^*$ ✓

$(\circ)$

⑤ $\underline{p\wedge\neg p}$, $\circ\square((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg p))$, B^*, $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg p))^*$

$\downarrow(\wedge)$

⑥ $p, \neg p, \ldots$

Un seul état : le 4

b) L'automate :

N.B. C'est le cas particulier où on n'a pas d'eventualities !

$\mathcal{F} = \{\{1\}\}$

c) On lit, et on accepte, un seul mot : $\{p, q\}^\omega$

d) On n'accepte pas $\{p\}^\omega$, par exemple

e) Satisfiable, pas valide.

Solution pour l'exercice 6

$$A = q \wedge \Box((q \rightarrow \bigcirc \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow \bigcirc q))$$

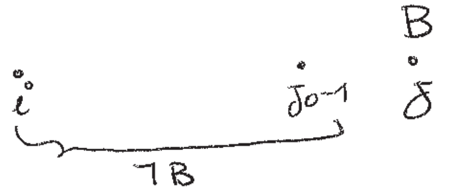
Solution pour l'exercice 7

On donne ici seulement la solution pour l'équivalence $\neg(A \,\mathcal{U}\, B) \equiv \Box \neg B \vee (\neg B \,\mathcal{U}\, (\neg A \wedge \neg B))$, qui est la moins facile des deux.

a) Supposons que $A \,\mathcal{U}\, B$ est fausse à un état i d'une interprétation I, et montrons que $F = \Box \neg B \vee (\neg B \,\mathcal{U}\, (\neg A \wedge \neg B))$ est alors vraie à i.

Puisque $A \,\mathcal{U}\, B$ est fausse à i, alors ou bien $\neg B$ est toujours vraie pour tout $j \geq i$, et dans ce cas F est vraie à i - c'est évident - ou bien il existe un $j \geq i$ tq B est vraie à j. Dans ce cas, forcement le premier de ces j (appellons le j_0) est tq il est strictement superieur à i, et A est fausse dans au moins un point de l'intervalle $[i, \ldots, j_0 - 1]$.

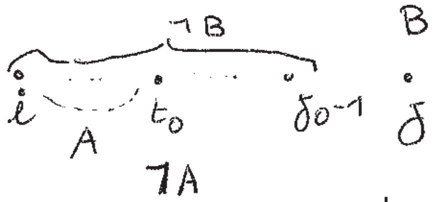
On a donc :



et $\exists t,\ i \leq t \leq j_0 - 1$ tq $\neg A$ est vraie à t.

Soit t_0 le premier instant de $[i, \ldots, j_0 - 1]$ où $\neg A$ est vraie.

On a donc :



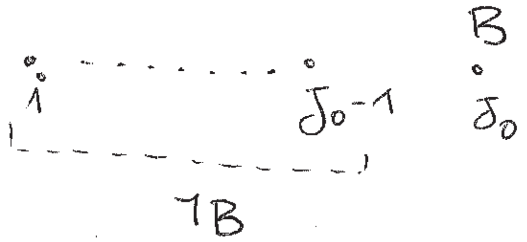
(il est possible que $t_0 = j_0 - 1$)

En prenant t_0 comme "témoin" de ~~[illegible]~~ l'eventualité $\neg B \,\mathcal{U}\, (\neg A \wedge \neg B)$

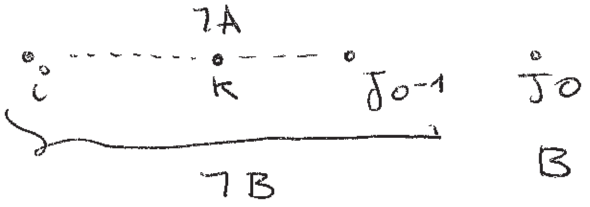
on voit tout de suite que $\neg B \, \mathcal{U} (\neg A \wedge \neg B)$ est vraie à i.

b) Supposons que $F = \Box \neg B \vee (\neg B \, \mathcal{U} (\neg A \wedge \neg B))$ est vraie à i. Si $\Box \neg B$ est vraie à i, c'est clair que $A \, \mathcal{U} B$ est fausse à i. Supposons donc $\Box \neg B$ fausse à i, et soit j_0 le premier $j \geq i$ tq B est vraie à i. Forcement $j_0 > i$ (si $j_0 = i$, $\neg B \, \mathcal{U} (\neg A \wedge \neg B)$ ne pourra pas être vraie à i).

On a donc:



Puisque $\neg B \, \mathcal{U} (\neg A \wedge \neg B)$ doit être vraie à i, il doit exister un $k < j_0$ tq $\neg A \wedge \neg B$ est vraie à k:



Il est donc clair que $A \, \mathcal{U} B$ est fausse à i.